W ostatnim przypadku, gdy obie liczby n i k są nieparzyste osie symetrii przechodzą przez dokładnie jeden wierzchołek n-kąta. Jeden czarny paciorek musi być umieszczony w tym wierzchołku, zaś pozostałe symetrycznie względem osi co można uczynić na

$$\binom{(n-1)/2}{(k-1)/2}$$

sposobów. Tak więc

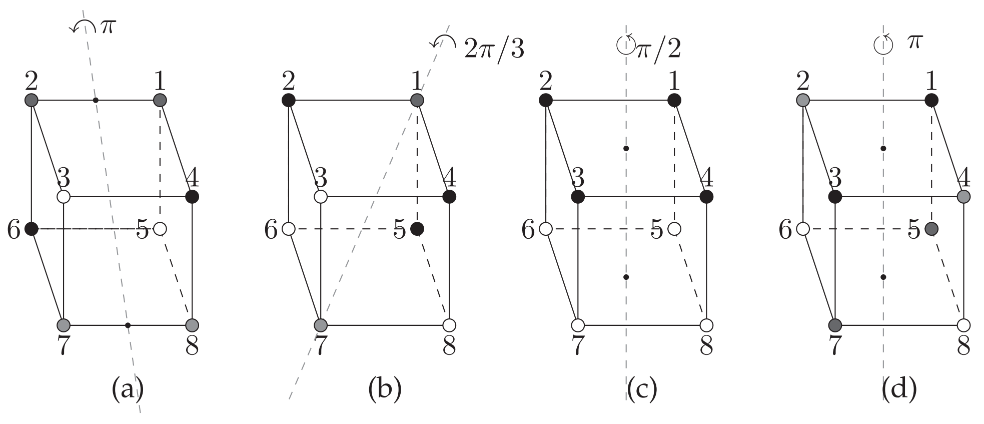
$$N = \frac{\binom{n}{k} + n\binom{(n-1)/2}{(k-1)/2}}{2n}.$$

Przyjmując, że $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, wszystkie przypadki można zawrzeć w jednym wzorze

$$N = \frac{\binom{n}{k} + n\binom{[\frac{n-1}{2}]}{[\frac{k}{2}]}}{2n}. \qquad \square$$

Przykład 4.2. *Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki sześcianu n kolorami?*

Rozwiązanie. Ponumerujmy wierzchołki sześcianu (jak na Rysunku 4.5). Niech X oznacza zbiór wszystkich kolorowań wierzchołków n-kolorami. Oczywiście $|X| = n^8$. Dwa kolorowania uznajemy za identyczne, gdy jedno otrzymuje się z drugiego przez pewien obrót sześcianu. Zatem powinniśmy rozważyć działanie na X grupy obrotów właściwych sześcianu; na podstawie Twierdzenia 4.4 izomorficznej z S_4. Liczba orbit tego działania jest poszukiwaną liczbą kolorowań wierzchołków. Rysunek 4.5 pokazuje cztery możliwe typy



Rysunek 4.5. Obroty sześcianu